

**Aufgabensammlung Teil 1:
Funktionen ohne Parameter**

**Einfache Funktionsuntersuchung ohne Zusatzaufgaben
und Abituraufgaben**

Neu zusammengestellte Aufgabensammlung.

Datei Nr. 43101

Stand: 6. März 2019

Friedrich W. Buckel

Inhalt: Zuerst die Funktionenliste

Typ 1 Funktionen mit Grad Zähler < Grad Nenner

(a) Nenner ohne Summe

7

Aufgabe 101

$$f(x) = -\frac{2}{x}$$

Aufgabe 102

$$f(x) = 8 \frac{x+2}{x^2}$$

Aufgabe 103

$$f(x) = \frac{2-2x}{x^2}$$

Aufgabe 104

$$f(x) = 16 \frac{x^2-4}{x^3}$$

(b) Nenner mit Summe, mit Polstellen

3

Aufgabe 111

$$f(x) = \frac{4}{x-2}$$

Aufgabe 112

$$f(x) = \frac{12}{x-3}$$

Aufgabe 121

$$f(x) = \frac{1}{x^2-1}$$

Aufgabe 122

$$f(x) = \frac{2x}{x^2-4}$$

Aufgabe 123

$$f(x) = \frac{2}{x^2-9}$$

Aufgabe 124

$$f(x) = \frac{2}{x^2-2x}$$

Aufgabe 131

$$f(x) = \frac{5}{(x-2)^2}$$

Aufgabe 132

$$f(x) = \frac{2x+3}{(x+1)^2}$$

Aufgabe 133

$$f(x) = \frac{2x+2}{(x+1)^2}$$

Aufgabe 134

$$f(x) = \frac{1-x}{(x-2)^2}$$

Aufgabe 141

$$f(x) = \frac{2}{(1+2x)^2} + \text{Zusatz}$$

Typ 1 Funktionen mit Grad Zähler < Grad Nenner

(c) Nenner mit einer Summe – ohne Polstellen! 10

Aufgabe 151 $f(x) = \frac{48}{x^2 + 16}$

Aufgabe 152 $f(x) = \frac{16x}{x^2 + 8}$

Aufgabe 161 $f(x) = \frac{16}{x^2 + 4}$ mit Zusatz

Aufgabe 162 $f(x) = \frac{16x}{x^2 + 4}$ mit Zusatz

Aufgabe 163 $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ mit Zusatz

Aufgabe 164 $f(x) = \frac{4x - 8}{x^2 - 4x + 5}$ mit Zusatz

Aufgabe 170 $f(x) = \frac{2x + 5}{(x - 5)^2}$

Typ 2 Funktionen mit Grad Zähler > Grad Nenner

(a) Nenner ohne Summe 12

Aufgabe 201 $f(x) = \frac{2x + 4}{x} = 2 + \frac{4}{x}$

Aufgabe 202 $f(x) = \frac{x^2 - 27}{x^2} = 3 - \frac{27}{x^2}$

Aufgabe 203 $f(x) = 3 \frac{x^2 - x + 6}{x^2} = 3 - \frac{3}{x} + \frac{6}{x^2}$

(b) Nenner mit einer Summe, mit Polstellen 13

Aufgabe 211 $f(x) = \frac{x + 2}{x + 3}$

Aufgabe 212 $f(x) = \frac{4x + 2}{2 - x}$

Aufgabe 213 $f(x) = 2 - \frac{4}{x + 1}$

Aufgabe 221 $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 4}$

Typ 3 Funktionen mit Grad Zähler = Grad Nenner + 1

(a) Nenner ohne Summe

17

Aufgabe 301

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x} = x + \frac{2}{x}$$

Aufgabe 302

$$f(x) = \frac{x^2 - 8}{2x} = \frac{x}{2} - \frac{4}{x}$$

Aufgabe 303

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 12}{x^2} = x - 1 + \frac{12}{x^2}$$

Aufgabe 311

$$f(x) = \frac{x^3 - 8}{4x^2} \quad \text{mit Zusatz}$$

Aufgabe 312

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{4x^2} \quad \text{mit Zusatz}$$

Aufgabe 313

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{4x^2} \quad \text{mit Zusatz}$$

Aufgabe 314

$$f(x) = \frac{-x^3 - 2x^2 + 16}{2x^2} \quad \text{mit Zusatz}$$

Typ 3 Funktionen mit Grad Zähler = Grad Nenner + 1

(b) Nenner mit Summe

19

Aufgabe 321

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 4}{2x - 2}$$

Aufgabe 322

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 9}$$

Aufgabe 331

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 4}{(x+1)^2}$$

Aufgabe 335

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{x^2 + 4}$$

Aufgabe 341

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x + 8}{x + 2} \quad \text{mit Zusatz}$$

Aufgabe 342

$$f(x) = \frac{x^3}{3(x-1)^2} \quad \text{mit Zusatz}$$

Aufgabe 343

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 1} \quad \text{mit Zusatz (CAS)}$$

Typ 4 Funktionen mit Grad Zähler = Grad Nenner + 2

(a) Nenner ohne Summe 22

Aufgabe 411

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x} = \frac{x^3 + 2}{2x}$$

Aufgabe 412

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x} = \frac{x^3 - 2}{2x}$$

Aufgabe 421

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{x^4 + 2}{2x^2}$$

Aufgabe 422

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^4 - 2}{2x^2}$$

(b) Nenner mit Summe 23

Aufgabe 431

$$f(x) = \frac{x^3}{8x + 16} = \frac{x^3}{8(x + 2)}$$

Aufgabe 432

$$f(x) = \frac{x^4 - 8x^2 + 16}{2(x^2 + 8)} = \frac{(x^2 - 4)(x^2 + 4) + 16}{2(x^2 + 8)}$$

Aufgabe 441

$$f(x) = \frac{3x^2}{3(x^2 + 1)} \quad \text{mit Zusatz}$$

Typ 5 Funktionen mit Grad Zähler = Grad Nenner + 3 24

Aufgabe 511

$$f(x) = \frac{x^4 - x^2 + 36}{x}$$

Aufgabe 512

$$f(x) = \frac{x^5 - 13x^3 + 36x}{x^2 + 16}$$

Aufgabe 513

$$f(x) = \frac{1}{100} \cdot \frac{x^5 + 13x^3 + 36x}{x^2 - 16}$$

Typ 6 Betragsfunktionen 27

Aufgabe 611

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 2 - 3 \frac{|x|}{x^2 - 4} \quad \text{mit Zusatz}$$

Typ 7 Zusammengesetzte Funktionen ---

Noch leer

Typ 8 Anwendungsaufgaben siehe Datei 43200!

Aufgaben für diese Trainingsdatei

Typ 1 Funktionen mit Grad Zähler < Grad Nenner (a) Nenner ohne Summe

Einfache Funktionsuntersuchungen ohne Zusatzaufgaben:

Aufgabe 101

$$f(x) = -\frac{2}{x}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung!

Aufgabe 102

$$f(x) = 8 \frac{x+2}{x^2}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung!

Aufgabe 103

$$f(x) = \frac{2-2x}{x^2}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung!

Aufgabe 104

$$f(x) = 16 \frac{x^2-4}{x^3}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung!

Typ 1 Funktionen mit Grad Zähler < Grad Nenner (b) Nenner mit Summe, mit Polstellen

Aufgabe 111

$$f(x) = \frac{4}{x-2}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

Aufgabe 112

$$f(x) = \frac{12}{3-x}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

Aufgabe 121

$$f(x) = \frac{8}{x^2-4}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

Aufgabe 122

$$f(x) = \frac{2x}{x^2}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

Aufgabe 123

$$f(x) = \frac{x}{x^2-9}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

Aufgabe 124

$$f(x) = \frac{x}{x^2-2x}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

Aufgabe 131

$$f(x) = \frac{5}{(x-2)^2}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

Aufgabe 132

$$f(x) = \frac{2x+3}{(x+1)^2}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

Aufgabe 133

$$f(x) = \frac{2x+2}{(x+1)^2}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung!

Aufgabe 134

$$f(x) = \frac{1-x}{(x-2)^2}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung!

Aufgabe 141 (Abitur 1994 Baden-Württemberg)

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = \frac{2}{(1+2x)^2}$, ihr Schaubild sei K .

- a) Bestimme den maximalen Definitionsbereich.
 Untersuche K auf gemeinsame Punkte mit der x-Achse, Hoch- und Tiefpunkte, Wendepunkte sowie Asymptoten.
 Zeichne K im Bereich $-2 \leq x \leq 1$ mit Asymptoten mit Länge 2 cm.
- b) K schneidet die y-Achse in A .
 Eine Gerade durch P schneidet K in $B(x_B | y_B)$ mit $y_B < -\frac{1}{2}$.
 Berechne die Koordinaten von B .
 Bestimme die Punkte der Geraden $x = -\frac{1}{2}$, von denen aus die Strecke BP unter einem rechten Winkel erscheint.
- c) Die Tangente an P (aus a) bzw. b)) schneidet die x-Achse in Q .
 Berechne die Koordinaten von Q .
 Die Tangente, das Schaubild K , die positive x-Achse und die Gerade $x = z$ mit $z = \frac{1}{4}$ begrenzen eine Fläche. Bei Rotation dieser Fläche um die x-Achse entsteht ein Körper. Bestimme dessen Volumen $V(z)$.
 Existiert für $z > 0$ ein Grenzwert V^* dieses Volumens? Wenn ja, berechne dieses.

Typ 1 Funktionen mit Grad Zähler < Grad Nenner (c) Nenner mit einer Summe – ohne Polstellen!

Aufgabe 151

$$f(x) = \frac{48}{x^2 + 16}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung!

Aufgabe 152

$$f(x) = \frac{16x}{x^2 + 8}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung!

Aufgabe 161

$$f(x) = \frac{16}{x^2 + 4}$$

- a) Fertige eine komplette Kurvendiskussion an für die Schaubilder der folgenden Funktionen: Berechne also die Schnittpunkte mit der x-Achse, Polstellen, Symmetrieverhalten, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Fertige eine Zeichnung an.
- b) $P(u \mid f(u))$ sei für $u > 0$ ein beliebiger Kurvenpunkt von K_1 . Q sei das Spiegelbild zu P bzgl. der y-Achse: Berechne den Inhalt $A(u)$ des Dreiecks OPQ . Für welchen Wert von u nimmt dieser Inhalt einen extremen Wert an. Bestimme seine Art sowie seinen Wert.
- c) Dreht man das Dreieck OPQ um die x-Achse entsteht ein Kegel. Untersuche das Verhalten der Volumenfunktion $V(u)$ dieses Kegels für $u > 0$.
Für welchen Wert von u hat dieser Kegel das halbe Grenzwertvolumen (für $u \rightarrow \infty$)?

Aufgabe 162

$$f(x) = \frac{16}{x^2 + 4}$$

- a) Fertige eine komplette Kurvendiskussion an für die Schaubilder der folgenden Funktionen: Berechne also die Schnittpunkte mit der x-Achse, Polstellen, Symmetrieverhalten, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Fertige eine Zeichnung an.
- b) $P(u \mid f(u))$ sei für $u > 0$ ein beliebiger Kurvenpunkt von K_2 . Fällt man von P das Lot auf die x-Achse, so entsteht dort der Lotfußpunkt Q . Berechne den Inhalt $A(u)$ des Dreiecks OPQ .
Untersuche das Verhalten der Flächeninhaltsfunktion in ihrem Definitionsbereich.
- c) Dreht man das Dreieck OPQ um die y-Achse entsteht ein Körper, der wie ein Zylinder mit einem herausgebohrten Kegel aussieht.
Untersuche das Verhalten der Volumenfunktion $V(u)$ dieses Kegels für $u > 0$.

Aufgabe 163

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$, ihr Schaubild sei K .

- a) Bestimme den maximalen Definitionsbereich.
 Untersuche K auf Symmetrie, gemeinsame Punkte mit der x -Achse, auf Hoch- und Tiefpunkte, Wendepunkte sowie Asymptoten.
 Zeichne K im Bereich $-3 \leq x \leq 3$ samt Asymptoten mit Längeneinheit 2 cm.
- b) $P(u | f(u))$ sei ein Punkt auf dem Graphen von f für $u > 0$. Die Parallele zur y -Achse durch P schneidet die x -Achse in Q .
 Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks OPQ . Besitzt dies für eine bestimmte Lage von P einen extremen Inhalt?
 Zeichne das Schaubild der zu OPQ gehörenden Flächeninhaltsfunktion für $0 \leq u \leq 3$ mit Längeneinheit 3 cm.
- c) Im 1. Feld wird ein Dreieck $ABCD$ so eingezeichnet, dass C und D auf K liegen, A und B auf der x -Achse. Durch Drehung dieses Rechtecks um die x -Achse entsteht ein Zylinder.
 Berechne das Volumen des Zylinders in Abhängigkeit von der Höhe h des Rechtecks.
 Für welche Lage von C und D erhält dieses Zylindervolumen ein Maximum?
- d) Berechne diejenige Stammfunktion F zu f , deren Graph durch den Punkt $S(1 | 1)$ geht.
 Ist die Funktion $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x > 1 \\ F & \text{für } x \leq 1 \end{cases}$ über den Leugungs- und Differenzierbarkeitstest unterscheidbar?

Aufgabe 164

$$f(x) = \frac{4x - 8}{x^2 - 4x + 5}$$

- a) Untersuche das Schaubild K von f auf Schnittpunkte mit der x -Achse, Asymptoten, Wendepunkte und Extremwerte. Zeichne das Schaubild.
- b) Zeige, dass K punktsymmetrisch zum Wendepunkt ist.
- c) Verschiebe die Kurve so, dass der Wendepunkt im Ursprung liegt.
- d) Das Schaubild und Koordinatenachsen begrenzen eine Fläche. Berechne deren Inhalt.

Aufgabe 170

$$f(x) = \frac{2x + 5}{(x^2 + 4x - 5)^2}$$

Kurvendiskussion mit Schaubild.

Typ 2 Funktionen mit Grad Zähler = Grad Nenner (a) Nenner ohne Summe

Aufgabe 201

$$f(x) = \frac{2x+4}{x} = 2 + \frac{4}{x}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

Aufgabe 202

$$f(x) = \frac{3x^2 - 27}{x^2} = 3 - \frac{27}{x^2}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

Aufgabe 203

$$f(x) = 3 \frac{x^2 - x + 6}{x^2} = 3 - \frac{3}{x} + \frac{6}{x^2}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

Typ 2 Funktionen mit Grad Zähler = Grad Nenner (b) Nenner mit einer Summe, mit Polstellen

Aufgabe 211

$$f(x) = \frac{x+2}{x+3}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

Aufgabe 212

$$f(x) = \frac{4x+2}{2-x}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

Aufgabe 213

$$f(x) = 2 - \frac{4}{x+1}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

Aufgabe 221

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

Aufgabe 222

$$f(x) = \frac{x^2}{x-4x}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

Aufgabe 223

$$f(x) = \frac{x^2 - 6}{x^2 - 4}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

Aufgabe 231

$$f(x) = \frac{x^2}{(x-2)^2}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

Aufgabe 232

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{(x-1)^2}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

Aufgabe 233

$$f(x) = \frac{x^3 + 5x^2 - 6x}{x^3 + x^2 - 2x}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

DEMO

Typ 2 Funktionen mit Grad Zähler = Grad Nenner (c) Nenner mit einer Summe, ohne Polstellen

Aufgabe 241

$$f(x) = 2 \frac{x^2 - 9}{x^2 + 9}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

Aufgabe 242

$$f(x) = \frac{16 - 4x^2}{x^2 + 16}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

Aufgabe 251

$$f(x) = \frac{x^2 - 16}{x^2 + 4}$$

Fertige eine komplette Kurvendiskussion an für die Schaubilder der folgenden Funktionen: Berechne also die Schnittpunkte mit der x-Achse, Polstellen, Symmetrieverhalten, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Fertige eine Zeichnung an.

Zusatzaufgabe:

Es sei $P(u \mid f(u))$ für $u > 0$ ein Punkt des Schaubildes von K . Das Lot von P auf die Gerade $y = 1$ schneidet diese in Q . R sei der Punkt $R(0 \mid 1)$. Berechne den Inhalt $A(u)$ des Dreiecks PQR . Untersuche das Verhalten der Flächeninhaltsfunktion $A(u)$.

Aufgabe 252

$$f(x) = \frac{x^2 - 5}{x^2 + 4}$$

Fertige eine komplette Kurvendiskussion an für die Schaubilder der folgenden Funktionen: Berechne also die Schnittpunkte mit der x-Achse, Polstellen, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Fertige eine Zeichnung an.

Zusatzaufgaben

- (1) Zeige, dass K_5 punktsymmetrisch zu $Z(2 \mid 1)$ ist.
- (2) Es sei $P(u \mid f(u))$ für $u > 0$ ein Punkt des Schaubildes von K . Das Lot von P auf die Gerade $y = 1$ schneidet diese in Q . R sei der Punkt $R(0 \mid 1)$. Berechne den Inhalt des Dreiecks PQR . Untersuche das Verhalten der Flächeninhaltsfunktion $A(u)$.

Aufgabe 253

$$f(x) = \frac{4x^2}{x^2 + 4}$$

- a) Fertige eine komplette Kurvendiskussion an für die Schaubilder der folgenden Funktionen: Berechne also die Schnittpunkte mit der x-Achse, Polstellen, Symmetrieverhalten, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Fertige eine Zeichnung an.
- b) $P(u \mid f(u))$ sei für $u > 0$ ein Punkt des Schaubildes von K_3 . Das Lot von P auf die waagrechte Asymptote schneidet diese in Q. Spiegelt man P und Q an der y-Achse, erhält man R und S. Berechne den Inhalt $A(u)$ des Vierecks PQRS. Für welches u wird dieser Inhalt maximal?
- c) Dreht man das Rechteck um die y-Achse, entsteht ein Zylinder. Untersuche das Verhalten der Zylinder-Volumenfunktion $V(u)$.
- d) Dreht man das Rechteck um die x-Achse, entsteht ein Ring. Berechne dessen Volumen in Abhängigkeit von u .

Aufgabe 260

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 6}{x^2 + 2x + 5}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung!

Zeige durch Rechnung, dass das Schaubild symmetrisch zu einer Parallelen zur y-Achse ist. Welche Gleichung hat die Parallele, die entsteht, wenn man das Schaubild so in x-Richtung verschiebt, dass die y-Achse zur Symmetrieachse wird?

Typ 3 Funktionen mit Grad Zähler = Grad Nenner + 1 (a) Nenner ohne Summe

Aufgabe 301

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x} = x + \frac{2}{x}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

Aufgabe 302

$$f(x) = \frac{x^2 - 8}{2x} = \frac{x}{2} - \frac{4}{x}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

Aufgabe 303

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 12}{x^2} = x - 1 + \frac{12}{x^2}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

Aufgabe 311

$$f(x) = \frac{x^3 - 8}{4x^2}$$

- a) Berechne Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte.
- b) $P(u | f(u))$ sei ein beliebiger Kurvenpunkt des Schaubilds K von f.
Für welchen Wert von u geht die Tangente in P durch den Ursprung?
In welchem Punkt S schneidet die Tangente in P die Kurve K nochmals?
- c) Die Parallele zur y-Achse durch $P(u | f(u))$ jetzt mit $u > 1$ schneidet die schiefe Asymptote in Q.
Ferner sei $R(1 | 0)$ gegeben. Berechne den Inhalt des Dreiecks PQR.
Für welchen Wert von u nimmt das Dreieck einen extremen Inhalt an?
Bestimme dessen Art und Größe.

Aufgabe 312

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{4x^2}$$

- a) Bestimme Nullstellen, Asymptoten, Extrem und Wendepunkte. Zeichne K für $-7 \leq x \leq 7$.
- b) Die Gerade $x = u$ mit $u < 0$ schneidet das Schaubild von f in P und die schiefe Asymptote in Q. Untersuche den Flächeninhalt des Dreiecks OPQ.
- c) An welcher Stelle $x > 0$ ist $f(x) = 3$? Bestimme x mit einem Näherungsverfahren.
- d) $P(u | v)$ sei ein Kurvenpunkt mit $u > 0$.
Die Tangente in P schneidet die beiden Asymptoten in R und T.
Berechne den Inhalt des Dreiecks RTV.
- e) Welche Parallelen zur schiefen Asymptote haben mit der Kurve K wie viele Punkte gemeinsam?

Aufgabe 313

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - 4x - 8}{4x^2}$$

- a) Bestimme Nullstellen, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte.
Zeichne das Schaubild für $-6 \leq x \leq 6$ (y-Achse - 8 bis 8)
- b) Berechne die x-Koordinaten der Punkte B_1 und B_2 , in denen die Tangente die Eigenschaft hat, die y-Achse in $Z(0 | 1)$ zu schneiden.
- c) Welche Parallelen zur 1. Winkelhalbierenden schneiden / berühren die das Schaubild K von f?

Aufgabe 314

$$f(x) = \frac{-x^3 - 2x^2 + 16}{2x^2}$$

- a) Bestimme Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichne K für $-6 \leq x \leq 6$.
- b) Berechne die Kurven Punkte B, in denen die Tangente die y-Achse in $Z(0 | 5)$ schneidet.
- c) Zeige, dass das Schaubild schrägsymmetrisch zur y-Achse ist.
- d) Die Gerade $x = r$ ($r > 2$) schneidet K in P und die schiefe Asymptote in Q. Diese Gerade begrenzt zusammen mit der schiefen Asymptote, der Kurve K und der x-Achse eine Fläche mit den Eckpunkten PQ, N_1, N_2 . Berechne den Inhalt $A(r)$ sowie deren Grenzwert für $r \rightarrow \infty$.
In welchem Verhältnis teilt die Gerade $x = 2$ die Gesamtfläche?

Typ 3 Funktionen mit Grad Zähler = Grad Nenner + 1 (b) Nenner mit Summe

Aufgabe 321

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 4}{2x - 2}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

Aufgabe 322

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 9}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

Aufgabe 331

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 4}{(x+1)^2}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

Aufgabe 335

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{x^2 - 9}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

Aufgabe 341

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x + 8}{x + 2}$$

- Untersuche K auf Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichne K.
- Zeige, dass das Schaubild K zum Schnittpunkt der Asymptoten symmetrisch ist.
- Berechne den Schnittpunkt von K mit der Kurve $y = \frac{5}{x}$ mit dem Newtonschen Näherungsverfahren.
- Die Gerade mit der Gleichung $x = u$ mit $u > -2$ schneidet K in P und die schräge Asymptote in Q. R sei der Schnittpunkt der Asymptoten. Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks PQR in Abhängigkeit von u. Interpretiere das Ergebnis.

Aufgabe 342

$$f(x) = \frac{x^3}{3(x-1)^2}$$

(Abitur 2002, BW)

- Untersuche K auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Extrem- und Wendepunkte sowie auf Asymptoten. Zeichne K samt Asymptoten für $-6 \leq x \leq 6$ mit $1 \text{ cm} \approx 1 \text{ Einheitslänge}$.
- Das Schaubild K, die Gerade $x = 2$, die y-Achse mit $y = 0$ und $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ begrenzen ein Flächenstück. Berechne dessen Inhalt $A(v)$ in Abhängigkeit von v . Untersuche das Verhalten von $A(v)$ für $v \rightarrow \infty$.
- Die Tangente an K in einem Kurvenpunkt $P(a | f(a))$ mit $a > 1$ schneidet die y-Achse in $S(0 | \frac{3}{2})$. Beweise, dass dies für $a \in]4; 5[$ mindestens einmal passiert.
- Gezeigt ist die Stammfunktion $H(x) = \int_0^x \frac{f(-t) + f(t)}{t^2 + 1} dt$ für $-1 < x < 1$. Beweise, dass H monoton ist. Untersuche, ob sogar strenge Monotonie vorliegt.

Aufgabe 343

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 1}$$

- a) Untersuche K auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichne K im Bereich $-4 \leq x \leq 5$ mit Längeneinheit 1 cm.
- b) $P(u | f(u))$ liegt auf der Kurve K mit $u > 1$. Die Parallele zur senkrechten Asymptote durch P schneidet die schräge Asymptote in R. Die Parallele zur schrägen Asymptote durch P schneidet die senkrechte Asymptote in Q. Der Asymptotenschnittpunkt ist S. Berechne den Inhalt des Parallelogramms PQRS. Deute das Ergebnis.
- c) Zeige, dass das Schaubild K punktsymmetrisch zum Punkt $S(1 | 0)$ ist.
- d) K begrenzt mit den Koordinatenachsen im 2. Feld ein Flächenstück. Berechne seinen Inhalt.

Zusatzaufgabe für CAS-Rechner:

- e) Die Tangente in einem beliebigen Kurvenpunkt $B(u | f(u))$ mit $u > 1$ schneidet die Asymptoten in C und D. S sei deren Schnittpunkt.
- Für welche Lage des Punktes B nimmt das Dreieck DCS seinen extremen Inhalt an? Berechne seine Größe.

Typ 4 Funktionen mit Grad Zähler = Grad Nenner + 2

(a) Nenner ohne Summe

Aufgabe 411

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x} = \frac{x^3 + 2}{2x}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung!

Aufgabe 412

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x} = \frac{x^3 - 2}{2x}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung!

Aufgabe 421

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{x^4 + 2}{2x^2}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung!

Aufgabe 422

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^4 - 2}{2x^2}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung!

Typ 4 Funktionen mit Grad Zähler = Grad Nenner + 2 (b) Nenner mit Summe

Aufgabe 431

$$f(x) = \frac{x^3}{8x+16} = \frac{1}{8} \cdot \frac{x^3}{x+2}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung!

Aufgabe 432

$$f(x) = \frac{x^4 - 8x^2 + 16}{2(x^2 + 8)} = \frac{1}{2} \frac{x^4 - 8x^2 + 16}{x^2 + 4}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung!

Aufgabe 441

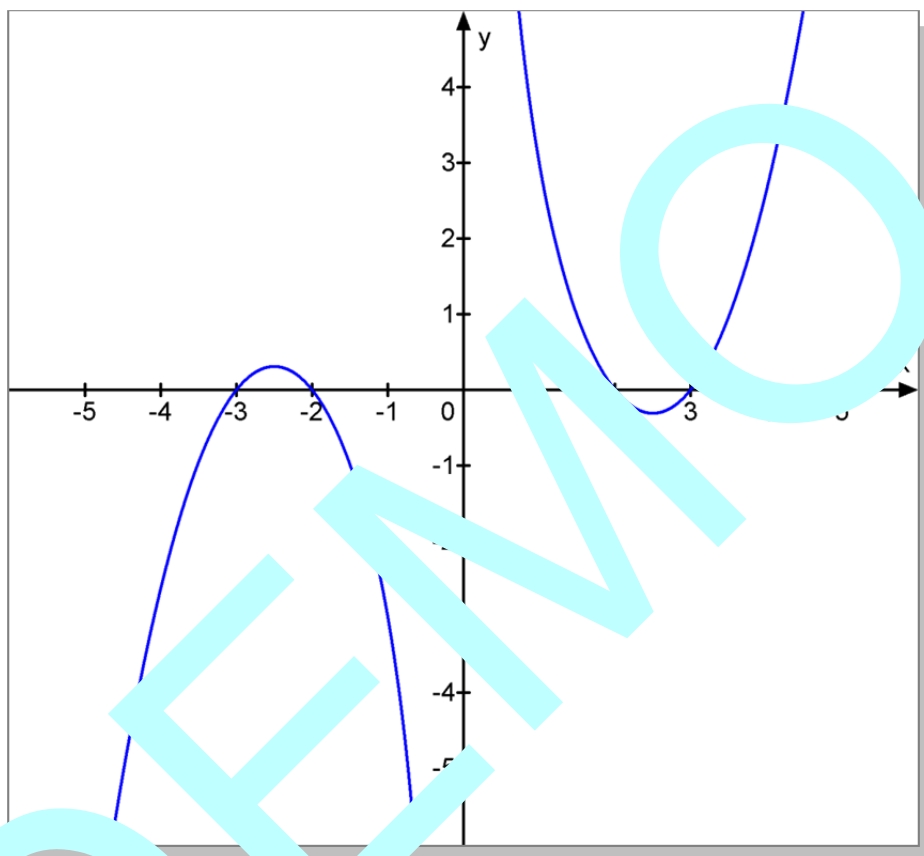
$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2}{3(x-1)} \quad (\text{Abitur 1993 - B})$$

- a) Bestimme die gemeinsamen Punkte von K mit der y-Achse und ihre Asymptoten. Welche Asymptoten hat K? Bestimme die Näherungskurve g für $|x| \rightarrow \infty$. Zeichne K mit den Asymptoten und der Näherungskurve für $x \geq 4$ und $-4 \geq y \geq 13$ mit Längeneinheit 1 cm.
- b) K besitzt genau einen Wendepunkt. Beweise, dass dies im Intervall $U = [-1; 0]$ liegt. Berechne seine x-Koordinate mit dem Newtonschen Näherungsverfahren auf 2 Dezimalen genau.
- c) Im 3. Feld begrenzen K und die x-Achse ein Flächenstück. Berechne dessen Inhalt A.

Typ 5 Funktionen mit Grad Zähler = Grad Nenner + 3**Aufgabe 511**

$$f(x) = \frac{x^4 - 13x^2 + 36}{x}$$

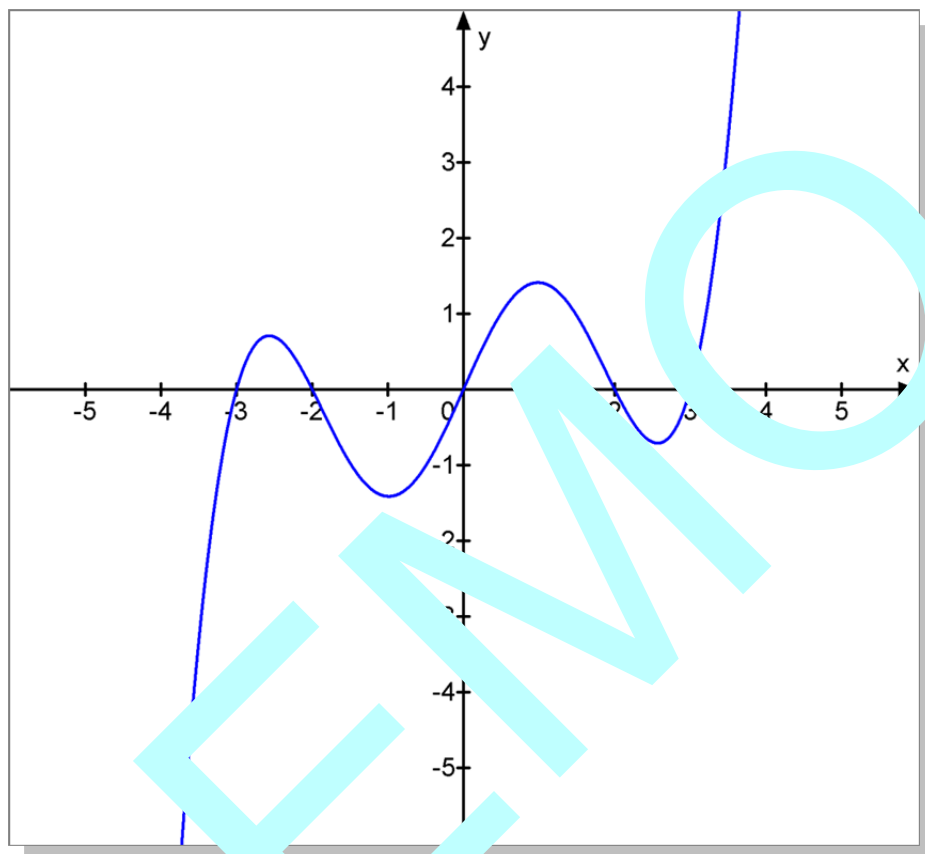
Noch ohne Lösung



Aufgabe 512

$$f(x) = \frac{x^5 - 13x^3 + 36x}{x^2 + 16}$$

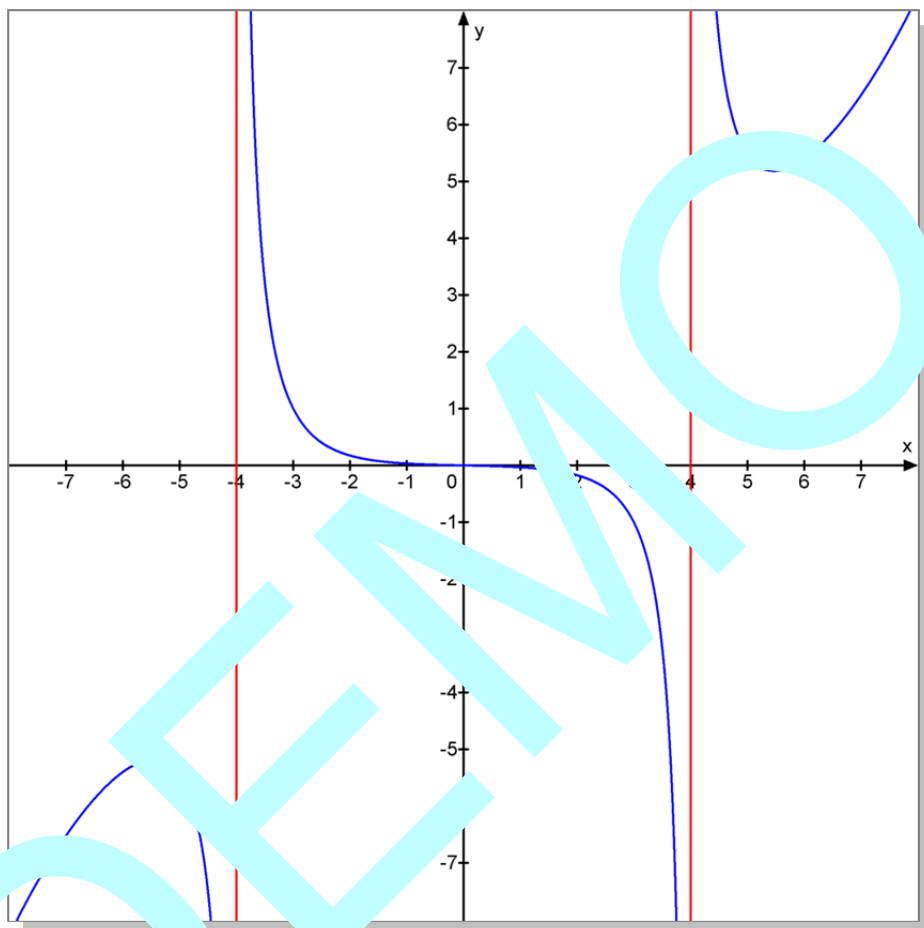
Noch ohne Lösung



Aufgabe 513

$$f(x) = \frac{1}{100} \cdot \frac{x^5 + 13x^3 + 36x}{x^2 - 16}$$

Noch ohne Lösung



Typ 6 Betragsfunktionen

Aufgabe 611

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 2 - 3 \frac{|x|}{x^2 - 4}$$

- a) Stelle f ohne Verwendung der Betragsstriche dar. Gib den maximalen Definitionsbereich an. Bestimme die Asymptoten des Schaubilds K von f .
Untersuche K für $x \neq 0$ auf Punkte mit waagrechter Tangente. (Es genügt, die Koordinaten auf zwei Dezimalen zu runden).
- b) Untersuche f auf Differenzierbarkeit an der Stelle $x = 0$.
Zeige, dass f bei $x = 0$ ein relatives Minimum hat.
Zeichne K uns die Asymptoten für $-7 \leq x \leq 7$ (Längeneinheit 1cm).
- c) Zeige, dass K im Intervall $[2,1; 3]$ genau einen Punkt Q mit der x -Achse gemeinsam hat. Berechne einen Näherungswert für die Abszisse von Q mit Hilfe des Newtonschen Iterationsverfahrens auf 3 Dezimalen genau.
- d) K wird im Bereich $4 \leq x \leq 7$ an der Geraden $y = 3$ gespiegelt.
Das Spiegelbild sei K^* . Bestimme die Funktionsgleichung für K^* .
Die Schaubilder K , K^* und die Gerade $y = 3$ begrenzen eine Fläche. Berechne deren Inhalt.

Lösungen
Lösungen

DEMO

Lösung 101

$$f(x) = -\frac{2}{x}$$

Grundeigenschaften:

Da der Zähler konstant ist, hat die Funktion keine Nullstellen.

Der Nenner wird 0 für $x = 0$, also ist $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Die Funktion hat bei $x = 0$ einen Pol.

Für $x \rightarrow 0^+$ gilt $f(x) \rightarrow -\infty$ und für $x \rightarrow 0^- \Rightarrow f(x) \rightarrow \infty$.

($x \rightarrow 0^+$ heißt "von rechts", also für $x > 0$ annähern.)

Das Schaubild K von f hat also die senkrechte Asymptote $x = 0$.

Wegen $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \left(-\frac{2}{x}\right) = -2 \cdot \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ ist die x -Achse waagrecht Asymptote.

Ableitungen:

$$f(x) = -2x^{-1}$$

$$f'(x) = 2 \cdot x^{-2} = \frac{2}{x^2}$$

$$f''(x) = -4x^{-3} = -\frac{4}{x^3}$$

Auswertung:

Da $f(x)$ nie Null wird, besitzt K keine Extremwerte.

Da $f'(x)$ nie Null wird, besitzt K keine Wendepunkte.

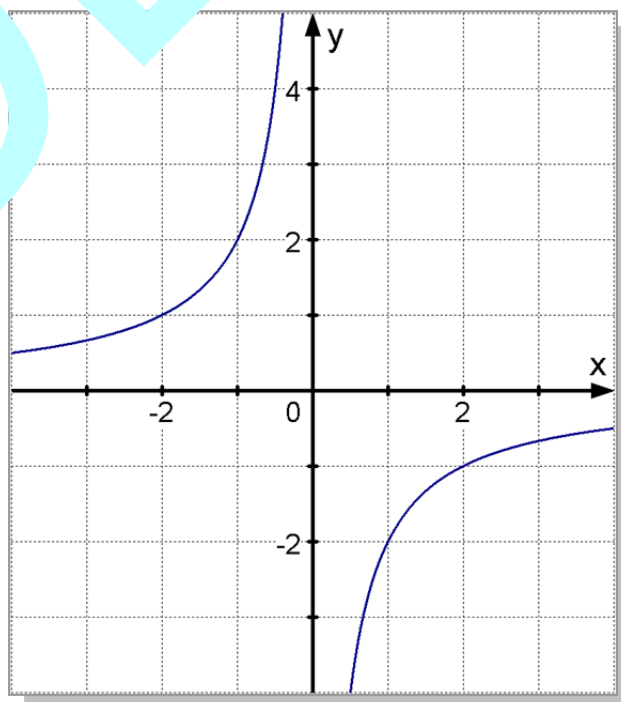
Monotonie:

Im Intervall $]-\infty; 0[$ ist f stetig und es gilt $f'(x) > 0$, d.h.

f wächst dort streng monoton von 0 gegen $-\infty$. Im Intervall $]0; \infty[$ ist f

stetig und es gilt $f'(x) < 0$, d.h. f wächst dort streng monoton

von $-\infty$ gegen 0 . Die Wertemenge ist daher $W = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.



Lösung 102

$$f(x) = 8 \frac{x+2}{x^2}$$

Grundeigenschaften:Nullstelle des Zählers: $x = -2$ Nullstelle des Nenners: $x = 0$, doppelte LösungDefinitionsbereich: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ Folgerung:

f hat die Nullstelle -2 und die Polstelle 0 ohne Zeichenwechsel.

Das Schaubild schneidet also die x-Achse im Punkt N (-2 | 0)

und hat die **Asymptoten** $x = 0$ (senkrecht) und $y = 0$ (waagrecht).

denn es ist $\lim_{|x| \rightarrow \infty} 8 \frac{x+2}{x^2} = 8 \lim_{|x| \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} \right) = 8 \cdot 0 = 0$

Ableitungen:

$$f(x) = 8 \frac{x+2}{x^2} = 8 \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} \right) = 8(x^{-1} + 2x^{-2})$$

$$f'(x) = 8(-x^{-2} - 4x^{-3}) = 8 \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3} \right) = 8 \left(-\frac{x}{x^3} - \frac{4}{x^3} \right) = 8 \frac{-x-4}{x^3}$$

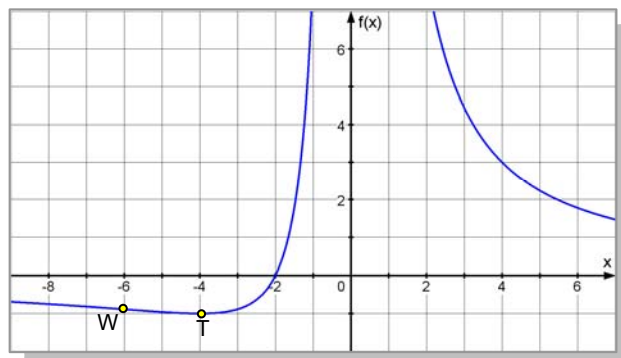
$$f''(x) = 8(2x^{-3} + 12x^{-4}) = 16 \left(\frac{1}{x^3} + \frac{6}{x^4} \right) = 16 \frac{x+6}{x^4}$$

Extrempunkte: Bed.: $f'(x_E) = 0 \Leftrightarrow x_E = -4$.Kontrolle: $f''(0) = 16 \frac{2}{(-)^4} > 0$, d.h. f hat bei 0 ein lokales Minimum mit

$$f(-4) = 8 \frac{-4+2}{(-4)^2} = -1$$

Ergebnis: K hat ein Tiefpunkt $T(-4 | -1)$.Wendepunkte: $f''(x_W) = 0 \Leftrightarrow x_W = -6$ Kontrolle: Da f'' bei -6 eine einfache Nullstelle besitzt, liegt Zeichenwechsel vor, d.h. K hat dort Krümmungswechsel.

$$y\text{-Wert: } f(-6) = 8 \frac{-6+2}{(-6)^2} = 8 \frac{-4}{36} = -\frac{8}{9} \approx 0,89$$

Ergebnis: $W(-6 | -\frac{8}{9})$ Wertmenge: $V =]-\infty; -1] \cup]-\frac{8}{9}; \infty[$ 

Lösung 103

$$f(x) = \frac{2 - 2x}{x^2}$$

DEMO